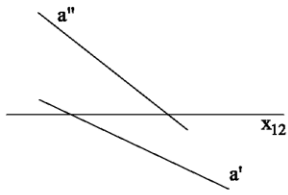
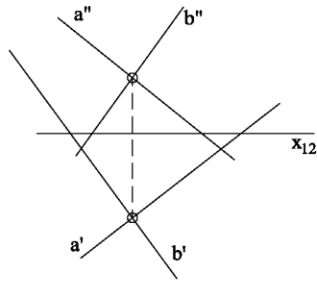


1) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

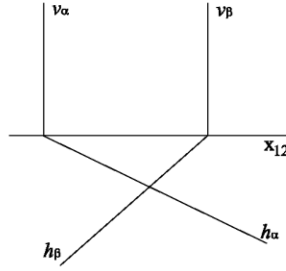


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

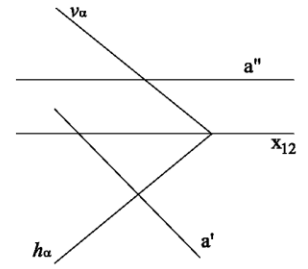


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

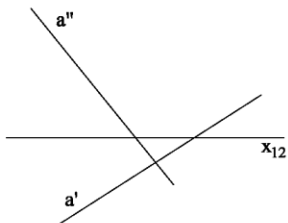


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

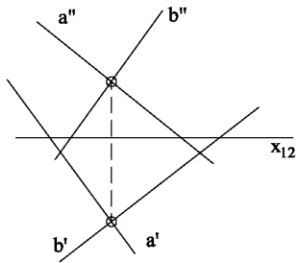


2) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

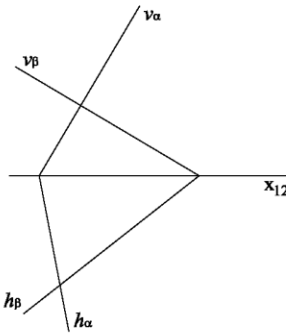


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

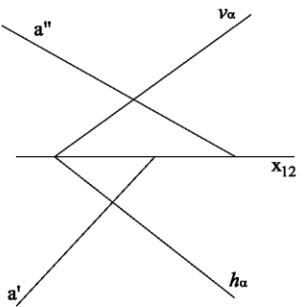


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

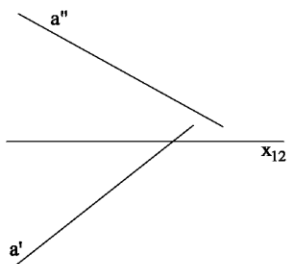


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

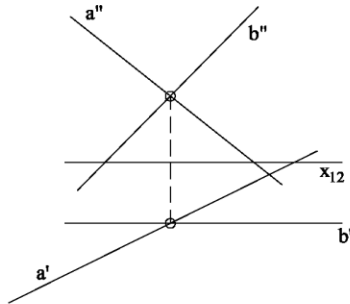


3) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

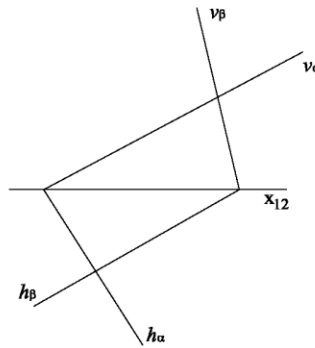


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

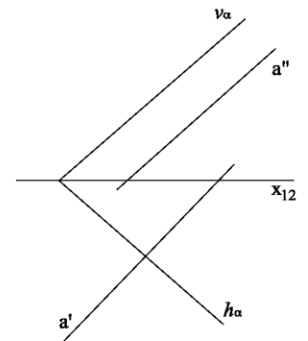


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

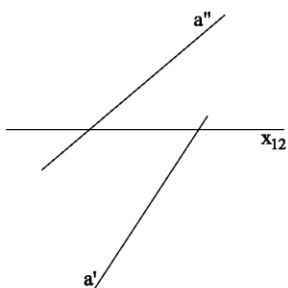


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

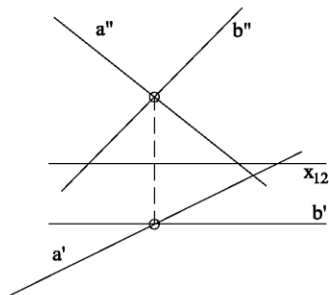


4) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

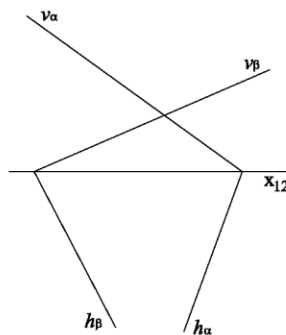


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

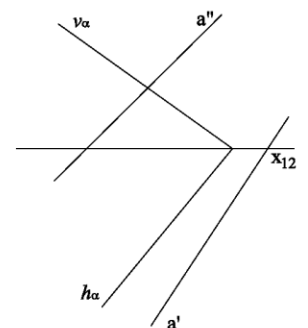


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

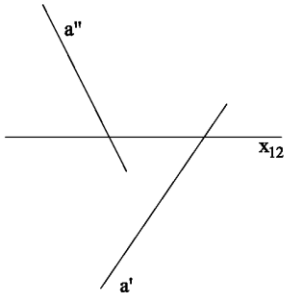


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

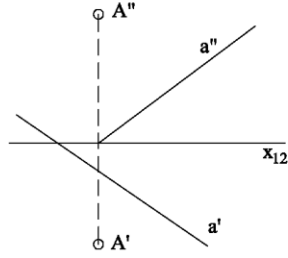


5) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

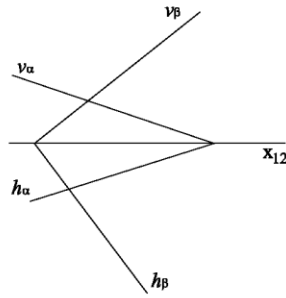


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

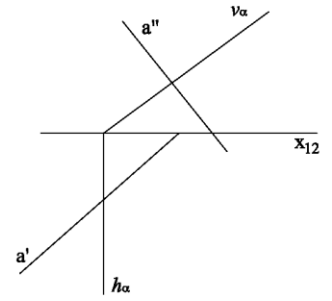


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

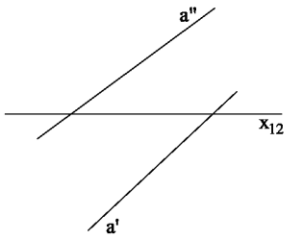


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

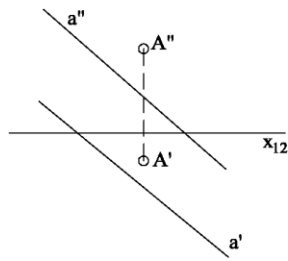


6) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

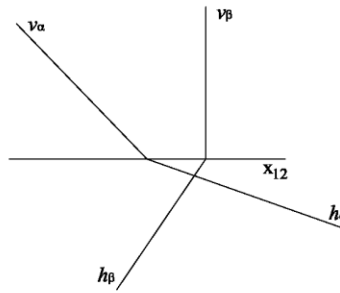


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

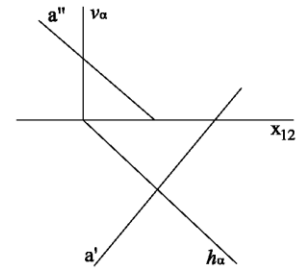


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

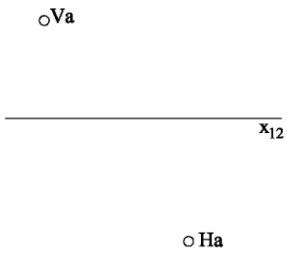


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

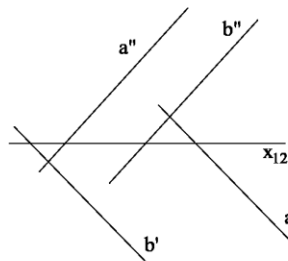


7) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

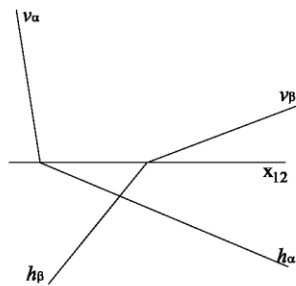


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

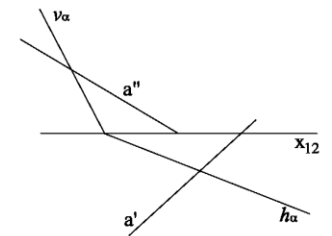


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$



znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

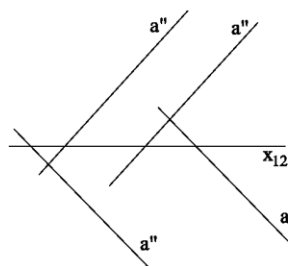


8) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

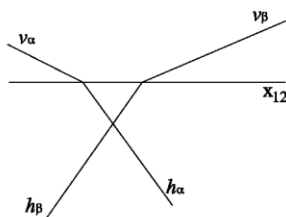


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

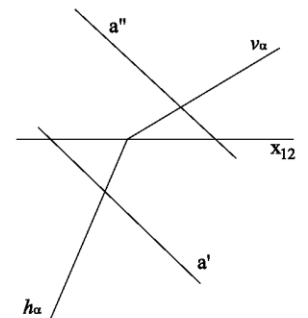


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

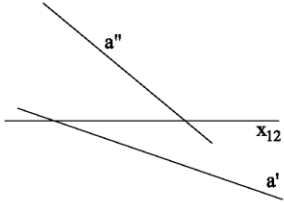


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

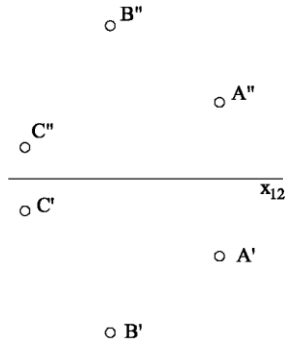


9) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

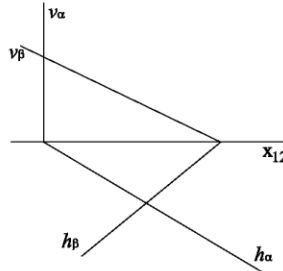


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

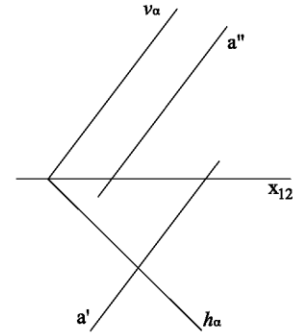


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

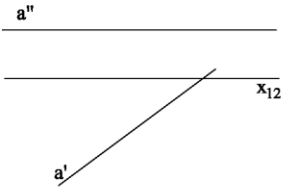


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

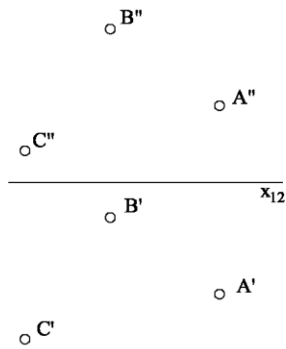


10) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

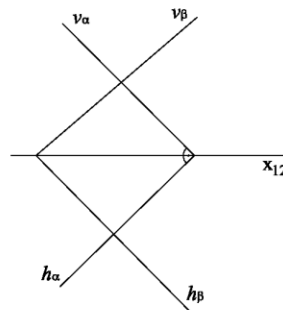


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

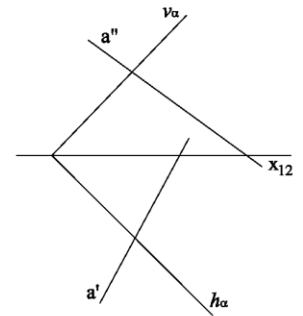


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

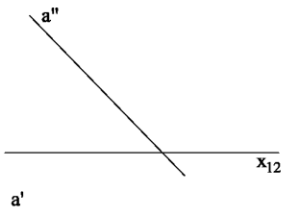


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

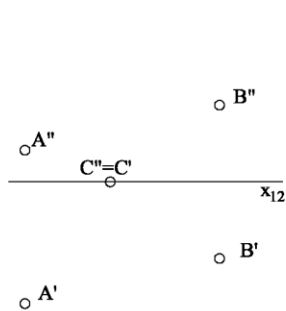


11) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

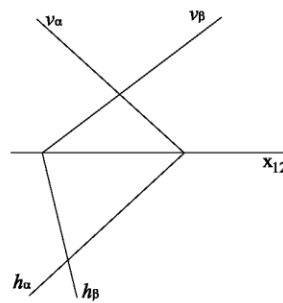


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

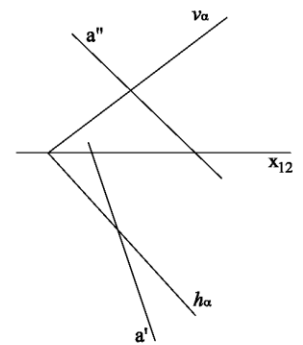


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

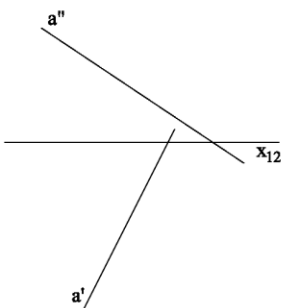


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

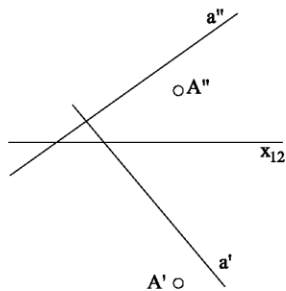


12) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

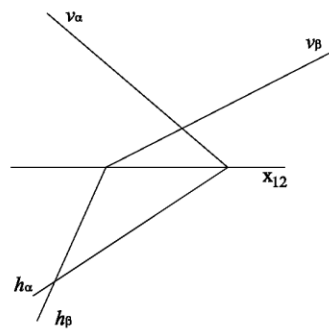


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

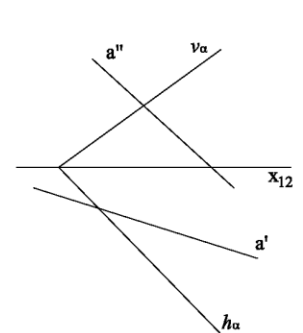


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

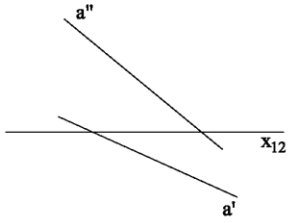


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

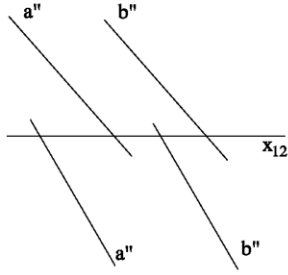


13) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

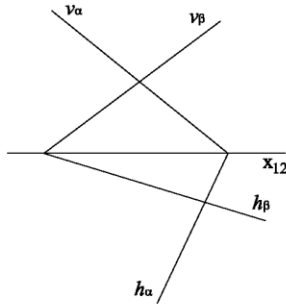


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

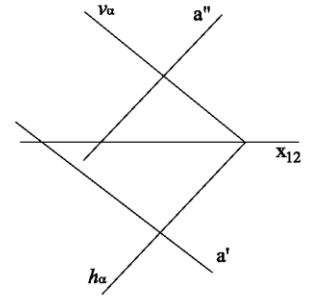


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

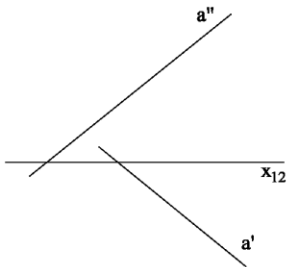


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

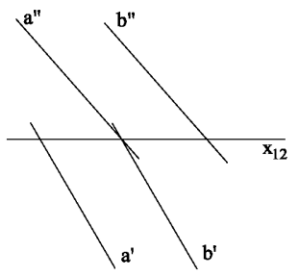


14) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

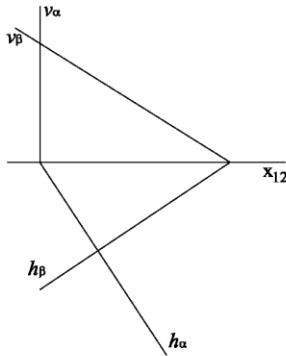


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

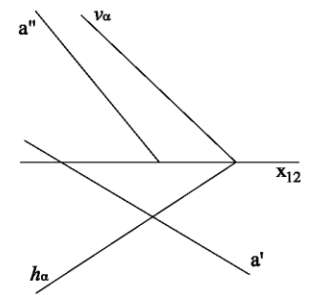


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

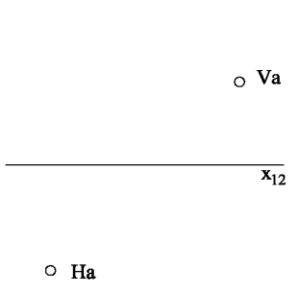


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

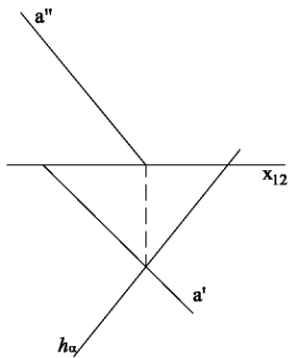


15) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

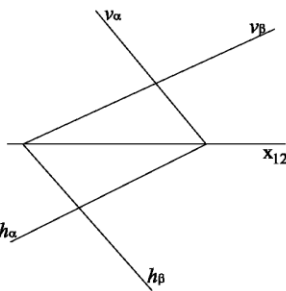


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

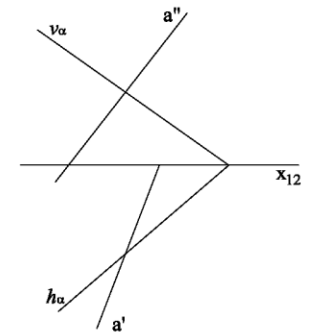


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$

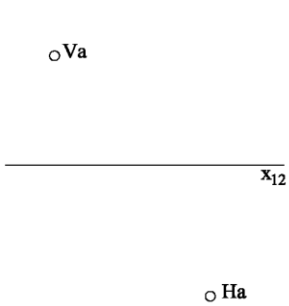


znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$

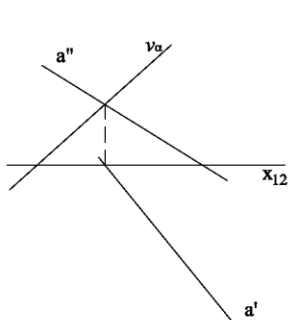


16) 2/1

znajdź ślady prostej  $a(a', a'')$  oraz punkty  $Ha(Ha', Ha'')$ ,  $Va(Va', Va'')$

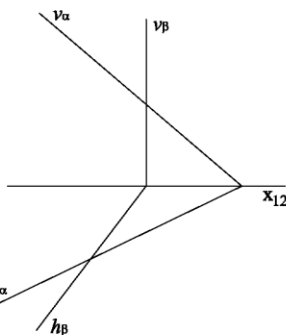


znajdź ślady płaszczyzny  $\alpha$

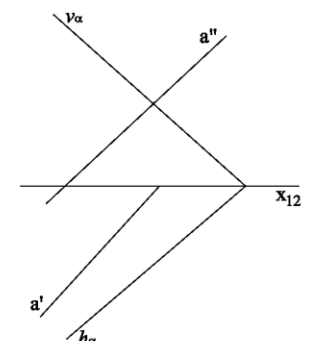


2/2

znajdź krawędź między płaszczyznami  $\alpha$  i  $\beta$



znajdź punkt przecięcia płaszczyzny  $\alpha$  prostą  $a$



## ZADANIE

ćwiczenia nr 2/1:

Temat: **ŚLADY PROSTEJ I PŁASZCZYZNY**

Format: A-4 , blok techniczny,

Technika: ołówek grub. 0,7 i 0,5; ekierki, linijki, cyrkiel.

Forma: ramka, tabliczka podstawowa wg wzoru.

*Zadania – wzory do rozdania 1-16 szt. Numeracja wg listy obecności.*

**Zadanie 2/1 A)** (po lewej):

Mając rzuty prostej  $a(a', a'')$  należy znaleźć jej ślady jako punkty  $H_a(H_a', H_a'')$ ,  $V_a(V_a', V_a'')$ ?

*Wskazówki:*

Ślady prostej – punkty w których prosta  $a(a', a'')$  przebija rzutnie  $\pi_1$  i  $\pi_2$ : odpowiednio *ślad poziomy  $H_a$  (horizontal)* i  *pionowy  $V_a$  (vertical)*.

**Ślad poziomy prostej  $a$ :  $a \cap \pi_1 \rightarrow H_a$  (punkt),**

gdzie  $H_a'$  – rzut poziomy śladu poziomowego;  
 $H_a''$  – rzut pionowy śladu poziomowego.

**Ślad pionowy prostej  $a$ :  $a \cap \pi_2 \rightarrow V_a$  (punkt),**

gdzie  $V_a'$  – rzut poziomy śladu pionowego;  
 $V_a''$  – rzut pionowy śladu pionowego.

Należy pamiętać, że ślady prostej są dwoma charakterystycznymi punktami leżącej na prostej. Mając rzuty prostej (poziomy i pionowy) można w łatwy sposób wskazać ślady (części wspólne prostej z rzutniami  $\pi_1$ ;  $\pi_2$ ) tej prostej znajdując punkt którego wysokość jest równa 0 – *ślad poziomy prostej  $a$  (miejsce w którym rzut pionowy przecina oś  $X - H_a''$ )* i punkt którego głębokość jest równa 0 – *ślad pionowy prostej  $a$  (miejsce w którym rzut poziomy przecina oś  $X - V_a')$* .

Punkt  $H_a$  (ślad poziomy) i jego rzut poziomy  $H_a'$  zjednoczą się w punkcie przecięcia prostej  $a'$  z prostą odnoszącą prostopadłą do osi  $X$  i przechodzącą przez  $H_a''$ ; odpowiednio ślad pionowy  $V_a$  i jego rzut pionowy  $V_a''$  zjednoczą się w punkcie przecięcia prostej  $a''$  z prostą odnoszącą prostopadłą do osi  $X$  i przechodzącą przez  $V_a'$ :  $H_a' + V_a' \rightarrow a'$ ;  $H_a'' + V_a'' \rightarrow a''$ .

**Zadanie 2/1 B)** (po prawej):

Mając rzuty przecinających się lub równoległych prostych  $a(a', a'')$  i  $b(b', b'')$  tworzące płaszczyznę  $\alpha$ , należy wyznaczyć ślady płaszczyzny  $\alpha(v_\alpha; h_\alpha)$ ?

*Wskazówki:*

Ślady płaszczyzny – proste będące krawędziami przecięcia płaszczyzny z rzutniami  $\pi_1$  i  $\pi_2$ : odpowiednio *ślad poziomy  $h_\alpha$  (horizontal)* i  *pionowy  $v_\alpha$  (vertical)*.

**Ślad poziomy płaszczyzny  $\alpha$ :  $\alpha \cap \pi_1 \rightarrow h_\alpha$  (prosta).**

**Ślad pionowy prostej  $\alpha$ :  $\alpha \cap \pi_2 \rightarrow v_\alpha$  (prosta).**

Należy pamiętać, że ślady płaszczyzny  $\alpha$  są prostymi leżącymi na rzutniach  $\pi_1$ ;  $\pi_2$ , a więc zjednoczą się odpowiednio z rzutami:  
 $h_\alpha = h_\alpha'$ ;  $v_\alpha = v_\alpha''$ . Pozostałe rzuty tych śladów leżą na osi  $X$ ,  $h_\alpha'' = v_\alpha' = x$ .

Rzuty wspólnego punktu (np.  $P$ ) dwóch prostych  $a$  i  $b$  (punkt przecięcia się prostych  $P = a \cap b$ ) leżą na prostej odnoszącej prostopadłej do osi  $X$ . *Punkt (np.  $P$ ) leży na płaszczyźnie  $\alpha$ , wtedy kiedy leży na prostej ( $a$  lub  $b$ ), która przynależy do tej płaszczyzny.*

Odpowiednie rzuty punktu, leżą na odpowiednich rzutach prostej (np.  $P' \in a'$ ,  $b'$ ), która leży na płaszczyźnie.

**Ślady prostych muszą leżeć na odp. śladach płaszczyzn.** Rzuty poziome prostych  $a$  i  $b$  ( $H_a$ ;  $H_b$ ) leżą na odp. śladzie poziomym płaszczyzny  $\alpha$  ( $h_\alpha$ ), a rzuty pionowe prostych  $a$  i  $b$  ( $V_a$ ;  $V_b$ ) leżą na śladzie pionowym płaszczyzny  $\alpha$  ( $v_\alpha$ ):

$H_a + H_b \rightarrow h_\alpha$ ;  $V_a + V_b \rightarrow v_\alpha$ . Punkt przecięcia się płaszczyzny  $\alpha$  z osią  $X$  jest również punktem przecięcia się jej śladów  $h_\alpha$  i  $v_\alpha$ , nazywamy jest *węzłem płaszczyzny i oznaczamy  $X_\alpha$ :  $h_\alpha \cap v_\alpha \rightarrow X_\alpha$* .

ćwiczenia nr 2/2:

Temat: **ELEMENTY PRZYNALEŻNE**

Format: A-4 , blok techniczny,

Technika: ołówek grub. 0,7 i 0,5; ekierki, linijki, cyrkiel.

Forma: ramka, tabliczka podstawowa wg wzoru.

*Zadania – wzory do rozdania 1-16 szt. Numeracja wg listy obecności.*

**Zadanie 2/2 A)** (po lewej):

Należy wyznaczyć rzuty prostej  $k(k', k'')$ , będącej krawędzią wspólną 2 płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$ , danych śladami  $(v_\alpha, h_\alpha)$  oraz  $(v_\beta, h_\beta)$ ?

*Wskazówki:*

Jeżeli dwie płaszczyzny  $\alpha$  i  $\beta$  zadane są śladami (odpowiednio  $v_\alpha$  i  $h_\alpha$ ;  $v_\beta$  i  $h_\beta$ ), to punkty  $H_k$  i  $V_k$  są punktami wspólnymi dla obu płaszczyzn: jako przecięcia śladów poziomych  $h_\alpha$  i  $h_\beta$  ( $h_\alpha \cap h_\beta \rightarrow H_k$ ) oraz śladów pionowych  $v_\alpha$  i  $v_\beta$  płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  ( $v_\alpha \cap v_\beta \rightarrow V_k$ ), a prosta łącząca te punkty jest krawędzią wspólną tych płaszczyzn  $k = \alpha \cap \beta$ .

W punkcie przecięcia się śladów poziomych płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  ( $h_\alpha \cap h_\beta \rightarrow H_k$ ) jest jego rzut poziomy  $H_k'$ , a rzut pionowy  $H_k - H_k''$  leży na osi X; w punkcie przecięcia się śladów pionowych płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  ( $v_\alpha \cap v_\beta \rightarrow V_k$ ) jest rzut pionowy  $V_k''$ , a rzut poziomy  $V_k - V_k'$  leży na osi x. Rzut poziomy  $k'$  prostej  $k$  przechodzi przez  $H_k'$  i  $V_k'$  ( $H_k' + V_k' \rightarrow k'$ ), a rzut pionowy  $k''$  przechodzi przez  $H_k''$  i  $V_k''$  ( $H_k'' + V_k'' \rightarrow k''$ ).

**Zadanie 2/2 B)** (po prawej):

Wyznaczyć punkt przebicia płaszczyzny  $\alpha$  danej śladami  $(v_\alpha, h_\alpha)$  prostą zadaną rzutami  $(a', a'')$ . Szukamy punkt wspólny prostej i płaszczyzny  $P(P'; P'')$ .

*Wskazówki:*

Aby znaleźć punkt w którym prosta  $a(a', a'')$  przebija płaszczyznę  $\alpha(v_\alpha, h_\alpha)$  należy wprowadzić pomocniczą płaszczyznę  $\beta$  (najlepiej w położeniu rzutującym) na której leży prosta  $a$ . Następnie szukamy krawędzi przecięcia płaszczyzn  $\alpha$  i  $\beta$  czyli wspólnej prostej  $k = \alpha \cap \beta$ . Miejsce w którym prosta  $k(k', k'')$  przecina się z prostą  $a(a', a'')$  – jest punktem  $P(P'; P'')$  przebicia płaszczyzny  $\alpha$  przez prostą  $a$ :  $a \cap \alpha \rightarrow P$ .

Literatura:

Bogaczyk T. - 13 wykładów z geometrii wykreślnej. Oficyna Wydawnicza Politechniki Wrocławskiej.

Janusz Eichler. Internetowy kurs geometrii wykreślnej.

Elementy wspólne. Ćwiczenia. [<http://www.instsani.pl/83/elementy-wspolne>].